Rechnen im Raum
mit Geometrischer Algebra

Dr.- Ing. Dietmar Hildenbrand

Ernst Schröder Kolloquium
TU Darmstadt
30. Januar 2010

1 Einleitung

Sehr viele Fragestellungen aus Naturwissenschaft und Technik haben einen geometrischen Hintergrund. Hat man eine geometrische Lösung eines Problems gefunden, muss man üblicherweise unterschiedlichste mathematische Vorgehensweisen zu Rate ziehen, um die einzelnen Schritte in mathematische Formeln zu fassen. Mit der geometrischen Algebra (GA) steht nun eine übergreifende Mathematik zur Verfügung, die es erlaubt, sehr direkt aus der geometrischen Anschauung heraus zu rechnen. So kann in geometrischer Algebra beispielsweise mit geometrischen Objekten wie Kugeln, Ebenen und Kreisen sowie mit geometrischen Operationen wie Schnitten von verschiedenen Objekten oder Transformationen sehr einfach gerechnet werden.

Die Grundlagen der GA wurden schon 1844 von Hermann Grassmann gelegt. Da seine Arbeiten auf eine stark philosophisch geprägte Art beschrieben und motiviert wurden, fanden sie bei den Mathematikern der Zeit kaum Gehör. Neben der ursprünglich geisteswissenschaftlichen Komponente der GA erkennt man erst in den letzten Jahren das immense Potenzial der GA für viele Bereiche des Engineering und der Naturwissenschaften. Im Engineering gibt es aktuell hauptsächlich Anwendungen im Bereich von Computergrafik, Computer Vision und Robotik. In den Naturwissenschaften profitiert insbesondere die Physik von der GA als einer einfachen und allgemeinen mathematischen Sprache.

Aus Sicht der Informatik besonders interessant ist die Kombination der einfachen, eleganten mathematischen Beschreibung von Algorithmen mit hoher Performanz durch die neuen parallelen Rechnerarchitekturen. In einem ersten Proof-of-concept hat sich dabei als besonders vielversprechender Ansatz die Kompilierung von GA-Algorithmen in optimierte sequentielle Implementierungen erwiesen. Diese Technologie soll in Zukunft ausgebaut werden für hoch performante, spezifische Implementierungen für die unterschiedlichsten parallelen Rechnerarchitekturen. Die Technologie bietet darüber hinaus sogar das Potenzial, zukünftige Rechnerarchitekturen massgeblich mitzubeeinflussen.

2 Geometrische Algebra

Die geometrische Algebra (GA) ist ein mathematisches System, welches es erlaubt, auf einem sehr hohen abstrakten Niveau und geometrisch sehr intuitiv Algorithmen zu entwickeln. Sie umfaßt eine ganze Reihe von unterschiedlichsten Systemen wie Vektoralgebra, Quaternionen, projektive Geometrie etc. Darüber hinaus kann mit geometrischen Objekten wie Kugeln, Ebenen und Kreisen sowie mit geometrischen Operationen wie Schnitten von verschiedenen Objekten oder Rotationen sehr einfach gerechnet werden.

Der Begriff *geometrische Algebra* wird hauptsächlich dann benutzt, wenn der Fokus der (ansonsten auch als *Clifford Algebra* bezeichneten) Algebra auf der *geometrischen Anschauung* liegt. Die Grundlagen der geometrischen Algebra wurden zwar schon in der Mitte des 19. Jahrhunderts gelegt, auf der anderen Seite erkennt man erst jetzt Stück für Stück, welch ein großes Potenzial ihr innewohnt. Es war der deutsche Lehrer Hermann Grassmann, der um das Jahr 1844 die Basis für die geometrische Algebra legte. Sein stark philosphisch geprägtes Werk wurde im Jahr 1862 von ihm mit seiner zweiten *Ausdehnungslehre* [Gra62] in eine mathematische Form gebracht. Ernsthaft mit Grassmann´s Arbeiten beschäftigt hat sich wohl hauptsächlich der englische Mathematiker William K. Clifford (1845-1879), welcher die geometrische Algebra in seinem Artikel "On the classification of geometric algebras" [Cli82] erweiterte. Dabei erkannte er, dass Grassmann´s äußere Algebra und Hamilton´s Quaternionen mit einem neuen Produkt, dem geometrischen Produkt, in *einer* Algebra zusammengefasst werden können. Nach seinem frühen Tod gerieten seine Arbeiten leider schnell in Vergessenheit. Statt der geometrischen Algebra dominierte die Vektoralgebra von Gibbs das letzte Jahrhundert. Darüber hinaus wurden in der Zwischenzeit in Naturwissenschaft und Technik weitere mathematische Systeme entwickelt, neben der Vektoralgebra beispielsweise die Dirac-Matrizen, Spin Algebra, Pauli-Matrizen und viele mehr. Siehe hierzu den Stammbaum mathematischer Systeme von David Hestenes (Abbildung 1). Heute weiss man, dass man es sich mit einer konsequenten Weiterverfolgung von Grassmann´s und Clifford´s Ideen hätte sehr viel leichter machen können. Dieses Wissen verdanken wir vor allem dem amerikanischen Physiker David Hestenes, der seit den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts die geometrische Algebra hauptsächlich in der Physik anwendet ([HS84, HZ91]). Sein besonderer Verdienst ist es, dass er in seinen Arbeiten großen Wert auf die geometrische Interpretation der Algebra legt. Das von ihm Anfang dieses Jahrhunderts eingeführte *konforme Modell* ([LHR01] und [Hes01]), eine spezielle Ausprägung der geometrischen Algebra, hat die Tür sehr weit geöffnet für die unterschiedlichsten Anwendungen. Inzwischen gibt es eine ganze Reihe von Anwendungsbeispielen aus den Bereichen Robotik, Computer Vision und Computergraphik (eine Übersicht über aktuelle Anwendungen findet sich in [RH10]).

Alyn Rockwood, David Hestenes und Hongbo Li halten ein US Patent für das konforme Modell (siehe [RLH05]). Es gibt dabei keinerlei Einschränkungen für die akademische Forschung und Lehre. Nutzt man die Technologie allerdings für kommerzielle Produkte im amerikanischen Markt, ist ein Lizenzabkommen erforderlich.

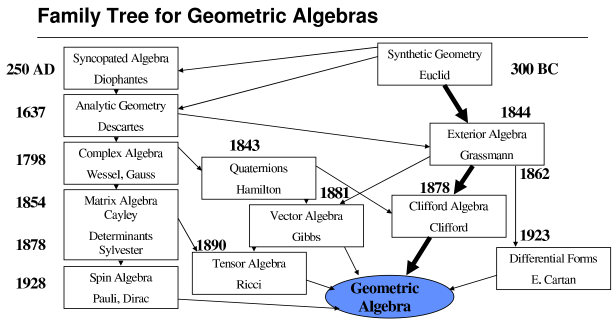

Abbildung 1: Ein Stammbaum mathematischer Systeme [Hes05]

Bei der 5-dimensionalen *konformen* geometrische Algebra kommen zu den drei euklidischen Basisvektoren die beiden Vektoren e_0 für den Ursprung und e_∞ für die Unendlichkeit hinzu. Alle Kombinationen dieser Basisvektoren ergeben die 32 algebraischen Basiselementen, die als Blades bezeichnet werden. Ein Multivektor ist eine Linearkombination all dieser Blades, die selbst eine Dimension zwischen 0 für einen Skalar und 5 für den sogenannten Pseudoskalar besitzen.

Tabelle 1 zeigt die geometrischen Basisobjekte der konformen geometrischen Algebra, die sich als einfache algebraische Ausdrücke ausdrücken lassen. Dies sind Punkte, Kugeln, Ebenen, Kreise, Geraden und Punktpaare. Die s_i repräsentieren Kugeln und die π_i Ebenen. Die beiden Repräsentationen sind dual zueinander. Um zwischen den beiden Repräsentationen wechseln zu können, wird der dual-Operator '$*$' benutzt.

In der Standard-Repräsentation wird eine Kugel repräsentiert mit Hilfe des Mittelpunkts P und des Radius r, während sie in der direkten Repräsentation konstruiert wird mit Hilfe des äußeren Produktes '$\wedge$' von vier

Tabelle 1: Repräsentationen von geometrischen Basisobjekten in konformer geometrischer Algebra

Entität	**Standard-Repräsentation**	**direkte Repräsentation**
Punkt	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Kugel	$s = P - \frac{1}{2} r^2 e_\infty$	$s^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
Ebene	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge e_\infty$
Kreis	$z = s_1 \wedge s_2$	$z^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
Gerade	$l = \pi_1 \wedge \pi_1$	$l^* = x_1 \wedge x_2 \wedge e_\infty$
Punktpaar	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p^* = x_1 \wedge x_2$

Punkten x_i, die auf der Oberfläche der Kugel liegen ($x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$). In der Standard-Repräsentation ist die Bedeutung des äußeren Produktes gleichbedeutend mit dem Schnitt von geometrischen Objekten. Beispielsweise ist der Kreis definiert als Schnitt von zwei Kugeln ($s_1 \wedge s_2$). Quadriert man die algebraischen Ausdrücke für Kugeln, Kreise oder Punktpaare erhält man das Quadrat ihrer Radien.

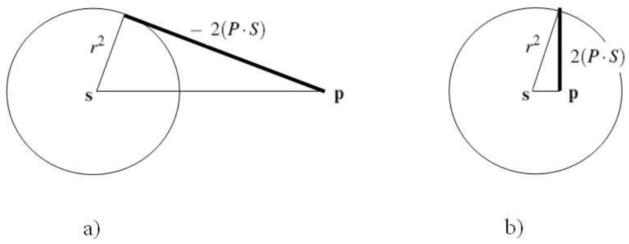

Abbildung 2: Das innere Produkt von Punkt und Kugel beschreibt ein Distanzmass. Das Doppelte des inneren Produktes entspricht dabei dem Quadrat der fett eingezeichneten Segmente, wobei das Vorzeichen angibt, ob der Punkt innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt.

Während das äussere Produkt zur Konstruktion von geometrischen Objekten bzw. zum Schneiden von geometrischen Objekten dient, wird das innere Produkt zur Berechnung von Distanzen und Winkeln genutzt. Die Bedeutung für Punkt und Kugel bspw. kann man der Abbildung 2 entnehmen.

Das geometrische Produkt wird benötigt für die Beschreibung von geometrischen Operationen wie Rotationen und Spiegelungen (siehe hierzu bspw. [HFPD04]).

Detaillierte Informationen zur geometrischen Algebra findet man beispielsweise in den Büchern von Christian Perwass [Per09], Leo Dorst [DFM07], Hestenes [Hes86] oder Sommer [Som01]. Einige Tutorials findet man in [HFPD04, PH04, DF03, DM02] oder [NR01, Hit04, MDB01, Hor04].

3 Geometric Algebra Computing

Entscheidend für den breiten Einsatz von geometrischer Algebra ist eine möglichst hohe Performanz der auf ihrer Basis entwickelten Algorithmen.

In dem Forschungsfeld, was ich als *Geometric Algebra Computing* bezeichne, sollen die positiven Eigenschaften von Algorithmen auf der Basis von geometrischer Algebra wie geometrische Intuitivität, Einfachheit und Kompaktheit kombiniert werden mit hoher Rechenleistung und damit mit hoher Performanz der Implementierungen.

Zwei Trends laufen an dieser Stelle vorteilhaft zusammen: Die GA entwickelt sich in eine Richtung, in der immer mehr geometrische Objekte und Transformationen als einfache algebraische Ausdrücke behandelt werden können (aktueller Höhepunkt ist die konforme geometrische Algebra von David Hestenes). Dadurch steigt das Optimierungs- und Parallelisierungs-Potenzial, welches von den in den letzten Jahren sich immer mehr durchsetzenden neuen parallelen Rechnerarchitekturen vorteilhaft genutzt werden kann (siehe

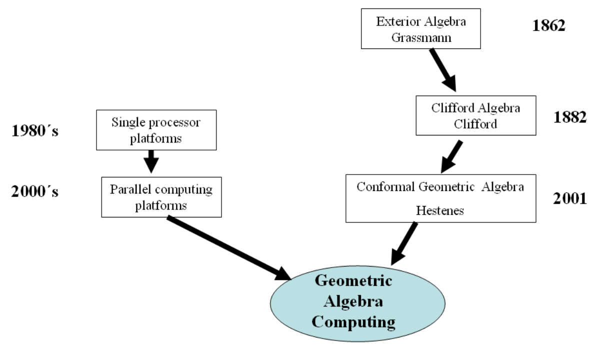

Abbildung 3: Zwei Trends führen zum Geometric Algebra Computing

Abbildung 3).

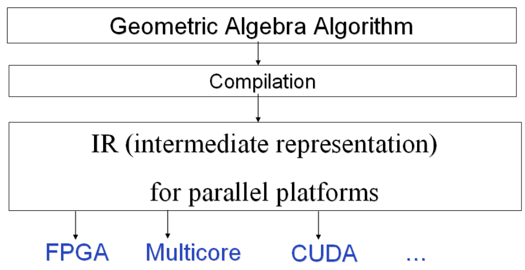

Abbildung 4: Geometric Algebra Computing Architektur.

In einem aktuellen DFG-Projekt wird bereits ein Compiler entwickelt, der Algorithmen in GA in performante Implementierungen für rekonfigurierbare Hardware (FPGA´s) umsetzt. Dieses Konzept soll in Zukunft verallgemeinert und für die unterschiedlichsten Rechner-Architekturen und Parallelisierungskonzepte angepasst werden. Der Compiler soll hierzu Algorithmen in GA zunächst so in eine Zwischenrepräsentation überführen, dass daraus möglichst einfach Implementierungen für die unterschiedlichsten parallelen Rechnerarchitekturen (Bsp. Multicore-Technologie von Intel, CUDA-Technologie von NVidia etc.) abgeleitet werden können.

Dieser Ansatz kann in Zukunft auch auf den aktuellen und zukünftigen Höchstleistungsrechner der TU Darmstadt erweitert werden. In Zusammenarbeit mit Rechnerherstellern könnten mittelfristig sogar neue innovative Rechnerarchitekturen beeinflusst werden.

Literatur

[Cli82] CLIFFORD, William K.: On the classification of geometric algebras. In: TUCKER, Robert (Hrsg.): *Mathematical Papers*, Macmillian, London, 1882, S. 397–401

[DF03] DORST, Leo ; FONTIJNE, Daniel: 3D Euclidean Geometry through Conformal Geometric Algebra (a GA-Viewer tutorial). In: *available from http:// www.science.uva.nl/ ga* (2003)

[DFM07] DORST, Leo ; FONTIJNE, Daniel ; MANN, Stephen: *Geometric Algebra for Computer Science, An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufman, 2007

[DM02] DORST, Leo ; MANN, Stephen: Geometric Algebra: a computational framework for geometrical applications (part I: algebra). In: *Computer Graphics and Application* 22 (2002), mai-jun, Nr. 3, S. 24–31

[Gra62] GRASSMANN, Hermann: *Die Ausdehnungslehre. Vollstaendig und in strenger Form begruendet*. Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin, Berlin, 1862

[Hes86] HESTENES, David: *New Foundations for Classical Mechanics*. Dordrecht, 1986

[Hes01] HESTENES, David: Old Wine in New Bottles : A New Algebraic Framework for Computational Geometry. In: BAYRO-CORROCHANO, Eduardo (Hrsg.) ; SOBCZYK, Garret (Hrsg.): *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*. Birkhäuser, 2001. – ISBN 0–8176–4199–8

[Hes05] HESTENES, David: *The Geometric Calculus Home Page*. Available at http://modelingnts.la.asu.edu/, 2005

[HFPD04] HILDENBRAND, Dietmar ; FONTIJNE, Daniel ; PERWASS, Christian ; DORST, Leo: Tutorial Geometric Algebra and its Application to Computer Graphics. In: *Eurographics conference Grenoble*, 2004

[Hit04] HITZER, Eckhard M. S.: Euclidean Geometric Objects in the Clifford Geometric Algebra of Origin, 3-Space, Infinity. In: *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 11 (2004), mar-apr, Nr. 5, S. 653–662

[Hor04] HORN, Martin E.: Grass, Mann! Das Clifford-Kinder-Rechenbuch. In: NORDMEIER, Volkhard (Hrsg.) ; OBERLAENDER, Arne (Hrsg.): *Didaktik der Physik der DPG, Beitraege zur Fruehjahrstagung Duesseldorf 2004 (Beitrag 8.5), Tagungs-CD des Fachverbands, ISBN 3-86541-066-9, LOB - Lehmanns Media, Berlin 2004.*, 2004

[HS84] HESTENES, David ; SOBCZYK, Garret: *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dordrecht, 1984

[HZ91] HESTENES, David ; ZIEGLER, Renatus: Projective Geometry with Clifford Algebra. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 23 (1991), S. 25–63

[LHR01] LI, Hongbo ; HESTENES, David ; ROCKWOOD, Alyn: Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. In: SOMMER, G. (Hrsg.): *Geometric Computing with Clifford Algebra*. Springer, 2001, S. 27–59

[MDB01] MANN, Stephen ; DORST, Leo ; BOUMA, Tim: The Making of GABLE, a Geometric AlgeBra Learning Environment in Matlab. (2001), S. 491–511

[NR01] NAEVE, Ambjorn ; ROCKWOOD, Alyn: Course 53 Geometric Algebra. In: *Siggraph conference Los Angeles*, 2001

[Per09] PERWASS, Christian: *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. Springer, 2009

[PH04] PERWASS, Christian ; HILDENBRAND, Dietmar: Aspects of Geometric Algebra in Euclidean, Projective and Conformal Space / University of Kiel. 2004. – Forschungsbericht

[RH10] ROCKWOOD, Alyn ; HILDENBRAND, Dietmar: Engineering Graphics in Geometric Algebra. In: BAYRO-CORROCHANO, Eduardo (Hrsg.) ; SCHEUERMANN, Gerik (Hrsg.): *Geometric Algebra Computing for Engineering and Computer Science*, Springer, 2010

[RLH05] ROCKWOOD, Alyn ; LI, Hongbo ; HESTENES, David: United States Patent No. 6,853,964: System for encoding and manipulating models of objects. (2005)

[Som01] SOMMER, Gerald (Hrsg.): *Geometric Computing with Clifford Algebra*. Springer, 2001